スタッガードグリッド積分形式定式化による3次元グローバルインダクションの解法

A 3-D forward solver using a staggered-grid integral formulation

上嶋 誠 [1], 藤 浩明 [2], Adam Schultz, [3]

Makoto Uyeshima [1], Hiroaki Toh [2], Adam Schultz [3]

[1] 東大・地震研, [2] 東大・海洋研, [3] ケンブリッジ大・理論地球物理研

[1] Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, [2] ORI, Univ. of Tokyo, [3] ITG, Univ. of Cambridge

電気伝導度は、地震波速度や減衰等とならび、地球内部の状態を直接推定し得る数少ない物理量の一つである。現状では、グローバルな電気伝導度分布を求める問題に関しては1次元（即ち深さ方向のみの依存性）のインヴァージョン手法が確立されている。しかし、観測量（磁場磁場間、電場磁場間の変換関数）の質的量的増大や解析手法の精密化に伴って、上部マントルが横方向に一樣では無い事が明らかになってきた。そこで、本研究ではスタッガードグリッドを用いたグローバル3次元電磁誘導問題の定式化を行い、良好な精度が得られた。次に、大規模な行列方程式の解を得るための反復法に改良を加える事でそのアルゴリズムの効率化を図った。

電気伝導度は、地震波速度や減衰等とならび、地球内部の状態を直接推定し得る数少ない物理量の一つである。特に、温度や水、メルトの存在、鉄含有率、相転移等に電気伝導度は敏感である。現状では、グローバルな電気伝導度分布を求める問題に関しては1次元（即ち深さ方向のみの依存性）のインヴァージョン手法が確立されている。しかし、観測量（磁場磁場間、電場磁場間の変換関数）の質的量的増大や解析手法の精密化に伴って、上部マントルが横方向に一樣では無く、その電気的不均質性とテクトニックな状況との間にある対応関係が存在する事等が明らかになってきた（例えば、Schultz, 1990, Lizarralde et al., 1995など）。そこで、本研究ではまず、グローバル3次元順問題の定式化を行い、そのアルゴリズムの効率化を図った。

電気伝導度構造を求めるためには、電離圏や磁気圏にソースをもつ外部起源電磁場変動が、地球内部にいかん浸透していき、その結果、地表においていかなる電磁場変動が観測されるべきかを計算する必要がある。本研究では、周波数領域での準静的なMaxwellの方程式を、適当な外部起源電磁場と電気伝導度分布を与えて解く。

3次元電磁誘導問題に安定した正しい解を与える1つの方法として、電場と磁場のグリッドスペーシングをずらしたスタッガードグリッドによるMaxwell方程式の積分表現を用いた、有限差分法(Mackie et al., 1994)が開発されてきた。この定式化の1つの特質として、保存関係式が正確に成り立っていることがあげられ、そのことが、解の安定性を支えていた。従来、このスタッガードグリッドによる定式化は、地球を平面と仮定したカルテシアン座標系上での計算のみに限られていたが、それを球体問題に応用するアルゴリズムの開発を行った。本研究では、磁場に関する2階方程式を解いている。

得られた解の正しさを明らかにするため、外部起源磁場の形を（現実問題においてもその近似が良く成り立つ）P10と仮定し、地球の電気伝導度分布が、1次元（この場合は解析解がある）、2次元（経度方向に一樣）、3次元（経度方向に不均質がある）の各問題について、解析解との比較や、積分方程式法を用いた解との比較を行った。その結果、3次元問題についての比較においても、深さ方向のメッシュ間隔を電磁場の空間変化スケールレングス（浸透深さ）の1/4にとってやれば、積分方程式法を用いた解(IDM法, 薄層モデル, Kuvshinov and Pankratov, 1994)や準解析解(nested sphereモデル, Martinec, 1998)と数%以内の精度で一致することが確かめられた。

本定式化では、解くべき問題はつまる所「大規模複素対称疎行列に対する連立一次方程式の反復解法」に帰着する。反復解法として当初 Mackie et al., 1994 による共役勾配解法である MRA 法を採用していたが、この方法の欠点は、十分な精度に達する迄に時間を要する、すなわち、収束が遅い、事にあった。例を挙げるなら、50x31x53 グリッド（主記憶域にして約100MB）上の nested sphere モデルの順問題解を得るのに、VT-alpha 600MHz シングルプロセッサで1周期当たり約3000秒掛かっていた。この遅さは一種致命的であり、この順問題解を探り入れてインバージョンに定式化する為には、反復解法の加速が必須課題となっている。

そこでまず反復解法の改善を行なった。問題の根底には、(1) 係数行列がエルミートでも正定値でもない事、(2) 係数行列の条件数が極めて大きく ill-condition である事（これは主に大気電気伝導度が導体地球のそれと比べてほぼ絶縁体と見なせる程小さい事による）の2つの困難がある。その為(1)でエルミート性を回復すべく Smith (1996) による係数行列の対称性を利用した Biconjugate gradient 法 (BiCG 法) を採用した結果反復ループ1回当たりの演算量を減らす事が出来た為、20%程度の加速と併せて、意外な事に、精度の向上も見られた。MRA 法はもともと正定値の実対称行列に対して有効な conjugate gradient 法に基づいており、複素係数行列に対しては収束が必ずしも保証されてはいなかった。これに対し、ここで新たに採用したBiCG法は、係数行列をいったんエルミート化するので収束保証範囲が広がっている。精度まで向上した事は、恐らく実際に解くべき行列により即した方法に変更出来た為ではないか、と推測している。但し、BiCG法も正定値性迄回復する訳ではないの

で、全てのモデルに対して収束が保証された訳ではない事には注意を要する。(2)は地球内部電磁誘導問題に内在する困難であり、原理的に不可避である。従って前処理法を工夫して徐々に条件数を数値的に改善してゆく他なく、よりよい前処理法の開発が今後の研究課題である。