

球面調和解析の新しい方法

A new method of spherical harmonic analysis

河野 長[1]

Masaru Kono[1]

[1] 岡山大固地研

[1] Institute for Study of the Earth's Interior, Okayama University

<http://www.misasa.okayama-u.ac.jp>

球面調和解析は、地球科学においては応用範囲の広い基礎的な手法である。特に、マントル対流、大気大循環モデル、地磁気ダイナモなどのシミュレーションにおいては、大域的な境界条件をうまく表現できるために、球面調和関数による展開がしばしば用いられる。このような非線形問題のシミュレーションでは、すべての量をスペクトル空間で扱うことは計算量が膨大になるために実用的ではない。このため、非線形の相互作用項については物理空間に戻って計算し、その結果を再びスペクトル空間に移して次のステップの計算を行う、いわゆる擬スペクトル法がしばしば用いられている。物理空間とスペクトル空間を行き来するためには球面調和変換とその逆変換を行うが、これは経度方向にはフーリエ変換、緯度方向にはルジャンドル変換である。このやり方の問題点は、フーリエ変換には高速な計算法があるのに対し、ルジャンドル変換にはそれがないことである。従って、シミュレーションの計算時間の大半は後者によって占められてしまう。これまでにいくつかの高速化の試みがなされているが、どれも成功していない。

この研究では、ルジャンドル関数の以下の性質を用いて高速な変換が可能であることを示す。

(1) 球面上の関数にまずフーリエ変換を施すことにより、位数 m によってスペクトルを分けることができる。

(2) 位数 m のルジャンドル級数は、 $\sin^m \theta$ と $L-m$ 次のフーリエ余弦級数の積である (L は打ち切り次数)。

(3) 従って、位数 m のルジャンドル級数は L 次のフーリエ余弦級数 (m even) または正弦級数 (m odd) で表される。

(4) (2) の表現から (3) の表現へ、またはその逆の変換にはかけ算を要しない早い計算法が存在する。

以上から、緯度によって定義された関数をフーリエ級数として求め、(3) から (2) への変換を施せばルジャンドル級数展開した場合と等価であるが、このときの計算は高速フーリエ変換等によって高速で実現できる。

以上で高速球面調和変換が可能であることが示されたが、実は(2) から (3)、(3) から (2) への変換は誤差を拡大しやすい計算なので、倍精度 (64 bits) では不足である。また、普通のフーリエ変換と異なり、逆変換は同じ演算では実現できない。このため、実際にこの手法をシミュレーションなどに用いるためには、さらにいくつかの問題を解決する必要がある。