

地下水汚染物質の非整数階微分を用いた移流拡散モデルのシミュレーション

A new model in groundwater hydrology: simulational study of advection-dispersion equation with fractional derivative

岡田 健太[1], 羽田野 祐子[2]

Kenta Okada[1], Yuko Hatano[2]

[1] 筑大・工シス, [2] 筑波大・機能工

[1] Col.Eng.Sys.,Uni.Tsukuba, [2] Inst. Eng. Mech & Sys., Tsukuba Univ.

<http://www.kz.tsukuba.ac.jp/~hatano>

地下水中における汚染物質の移行の予測のための基礎式として、従来より移流拡散方程式が広く用いられている。しかし、不均質な多孔質媒体中での物質輸送を表すのに適当でない場合があることが徐々に確認されてきている。このような流れを受け、本研究では Benson ら (1998) の研究をもとに媒体の不均質性を考慮した新しい支配方程式を導入する。具体的には、これまでの移流拡散方程式が、濃度 C について空間で 2 階、時間で 1 階の微分をした方程式であるのに対し、空間で 1.5 階、時間で 0.8 階のように整数でない階数の微分が現れる方程式である。このような非整数階の移流拡散方程式は次のようにして得られる。

1 次元ランダムウォークモデルにおいて、粒子のジャンプ幅 x を一定とし、次のジャンプまでの待ち時間 t を一定とした場合、通常の移流拡散方程式が導かれる。そこでまず媒体の不均質性を考慮し、通常の移流拡散方程式を導く際に一定としていたジャンプ幅 x に分布を持たせ、その分布関数を中心極限定理が成り立たないように、分散が発散するような形にする。このような遷移則に従う粒子の数密度の時間発展をフーリエ変換することにより、 x 方向についてアルファ ($1 < \text{アルファ} < 2$) 階という、非整数階の微分をほどこした支配方程式が得られる。

さらに汚染物質の地質媒体への吸着の影響を考慮し、待ち時間 t に分布を持たせることを考える。 t の分布関数を先ほどと同様に分散が発散する形にすることによって、時間でガンマ ($0 < \text{ガンマ} < 1$) 階という、非整数階の微分をほどこした支配方程式が導かれる。

このように、媒体中の流れの不均質性を考慮することにより空間での微分が、媒体中の吸着時間の不均質性を考慮することにより時間での微分が、それぞれ整数階ではなくなる。

以上の支配方程式を差分法によってシミュレーションし、実験データとの比較を行った。非整数階微分の項の差分スキームは広田の方法を用いた。

まず空間について非整数階微分をした場合の計算結果を図 1 に示す。通常の移流拡散方程式ではある程度のところまで濃度が 0 に落ち込んでしまうのに対し、アルファの値を小さくしていくことによって実際の濃度分布に近い長いテールを持つ分布を得ることができた。図 1 は拡散係数 $D = 1.0$ 、地下水平均流速 $v = 0.0$ とし、100 ステップ後の濃度分布を示している。

また、時間についての非整数階微分の式についても差分法により計算を行った。その結果、ガンマの値を小さくしていくことによって、同時刻において濃度が大きく、つまり吸着能の高い分布を得ることができ、拡散に遅れが生じているということが確認された。

最後に実測データとのフィッティングを行った。通常の移流拡散方程式よりも、今回用いた式のほうが実験結果をより忠実に再現している。比較に用いたカラム実験の例では、空間微分の階数は 1.5 程度であることが確認された (図 2)。発表では時間についての非整数階微分の式についても実験結果との比較を行い、吸着の効果が強い系での実験をも再現できるか検討したい。

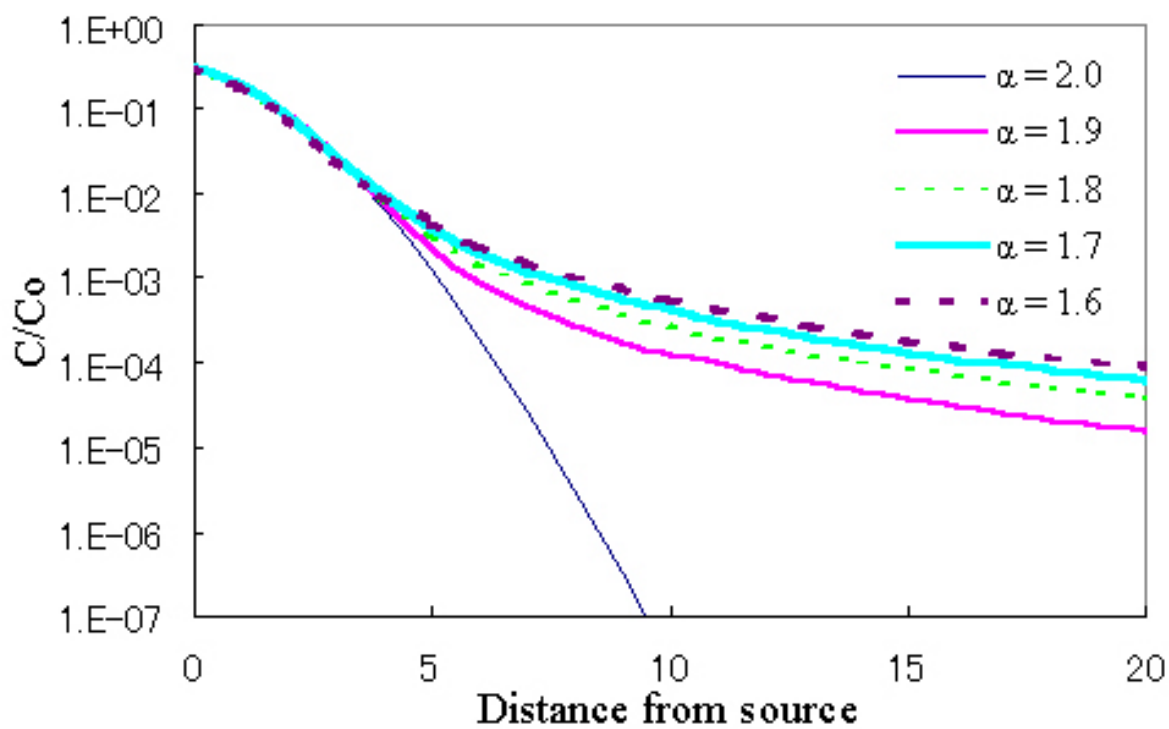


図1 空間で α 階の微分をした場合

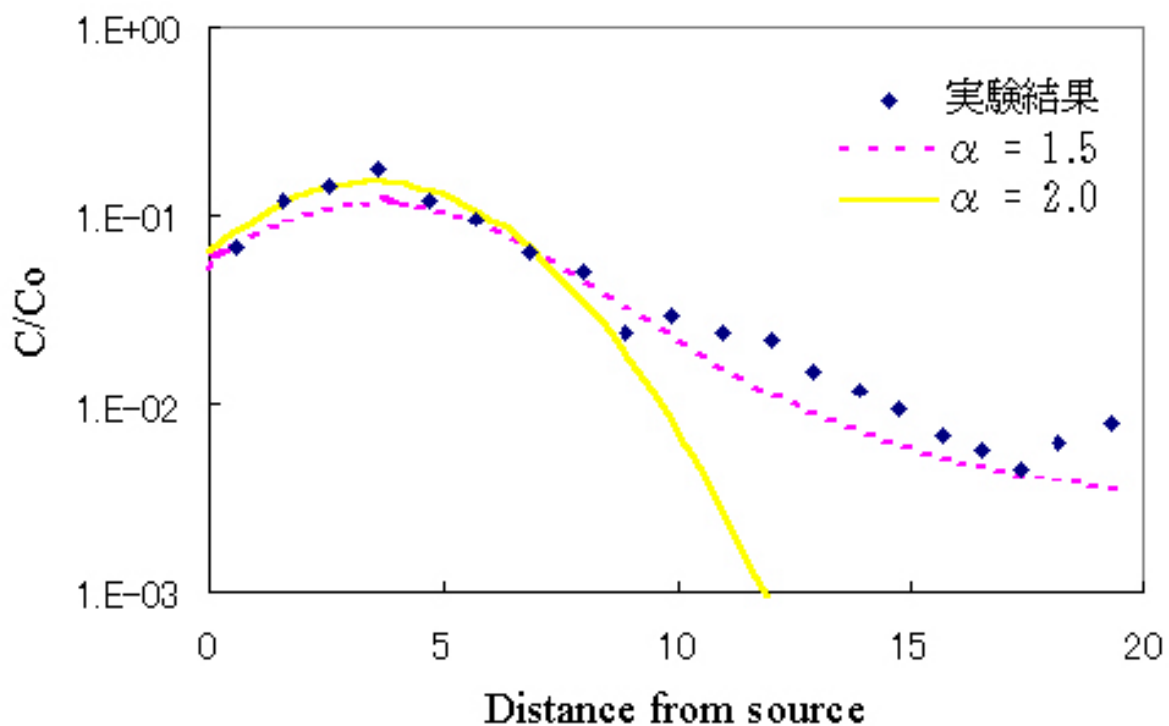


図2 実験データとの比較