陰陽格子法を用いた新しい三次元球殻マントル対流数値シミュレーションコードの開発

Development of a new numerical simulation code for 3-dimensional mantle convection in a spherical shell using Yin-Yang grid method

# 吉田 晶樹[1]; 陰山 聡[1]
Masaki Yoshida[1]; Akira Kageyama[1]

[1] 地球シミュレータセンター
[1] ESC

1980 年代半ばからこれまで世界で開発されてきた三次元球殻マントル対流数値シミュレーションコードに用いられている離散化の方法として，スペクトル法（Machetel et al., 1986; Glatzmaier, 1988; Bercovici et al., 1989; Zhang and Yuen, 1995; Harder and Christensen, 1996），有限体積法（Ratcliff et al., 1996; Iwase, 1996），有限要素法（Zhong et al., 2000; Tabata and Suzuki, 2000; Richards et al., 2001）がある．このうちスペクトル法は，流体内部で局所的に大きく変化する物理量を取り扱う場合，そのスペクトル展開に莫大な計算時間とメモリを要する．例えば，マントルを構成する物質（岩石）の粘性率は温度や歪速度，組成などによって水平方向に短い距離で何桁も変化する．そのため，最近ではマントル対流シミュレーションの研究にはスペクトル法は使われていない．一方で，有限差分，有限体積，有限要素法は，粘性率またはその空間微分を各格子点で「局所的に」扱うことが可能である．また，流体計算においては一般的に，差分法系の手法（有限差分法と有限体積法）は地球シミュレータに代表される大規模ベクトル・並列計算機において計算効率が高い．さらに，有限差分法は有限体積法とは異なり高精度化が容易であるという利点がある．そこで我々は有限差分法を採用することにした．

球ジオメトリにおける差分法において，球座標系の緯度経度に沿って単純に離散化する従来の「緯度経度格子法」では，(1) 極は座標特異点であるためロピタルの定理を使うなど特別な処理が必要となる（Kageyama et al., 1995），(2) 低緯度領域と高緯度領域で格子点間隔が極端に不均一であるため，クーラン条件による時間刻みが高緯度領域の密な格子間隔で決まってしまう，という問題が発生する．ここで我々は，これらの「極の問題」を解消するため，球座標格子系の低緯度領域のみを切り出した二つの球座標格子を組み合わせて全球面を覆う新しい格子法である「陰陽（イン・ヤン）格子法」（陰山，“ 陰陽格子の開発 ”，第 17 回数値力学シンポジウム要旨集，p246, 2003）を用いた新しい三次元球殻マントル数値シミュレーションコードの開発を行った．

マントル対流を支配する基礎方程式を無次元化し，二次精度の有限差分法で離散化する．マントル対流の定常流れ場（速度場と圧力場）は，これまでのマントル対流計算で広く使用されている SIMPLER アルゴリズム（Patankar, 1980）を用いて，質量保存式と運動方程式を同時に満たすように逐次補正しながら陰的に求める．エネルギー方程式の時間差分は，二次精度のクランク・ニコルソン法を用い，移流項の空間差分は風上差分法を用いて温度場を解く．速度，圧力，温度の変数配置は離散化が簡単で境界条件が扱いやすいコロケート格子法を採用する．陰陽格子法においては，これらの基礎方程式は時間ステップごとに二つの格子系において別々に同時進行で解くが，一方の格子系上の境界値データは，SIMPLER 計算と温度場計算のループとも，一回の反復計算ごとに他方の格子系上に重なる格子点から補間して与える．

今回，開発したコードの妥当性を調べるために，レイリー・ベナール型の熱対流モデルを解くことにより，これまでに三次元球殻マントル対流計算から得られている結果とのベンチマークテストを行った．温度場の初期条件は，静水圧下での熱伝導方程式と固定温度の境界条件を満たす温度場に「四面体型」と「六面体型」パターンの微小擾乱（Bercovici et al., 1989; Ratcliff et al., 1996）を加え，対流パターンが幾何学的対称・定常解を示す範囲の低いレイリー数を与えたときのヌッセルト数と二乗和平均対流速度を調べた．その結果，我々のコードと，上に列挙した従来のコードから得られた結果との間には，離散化法や，数値計算手法，格子点数の違いがあるにも関わらず，数%以内の誤差で整合することを確認した．また，粘性率が温度にのみ指数関数的に依存する場合には 6 桁以上変化しても計算が安定である．

一様粘性率でレイリー数が低い場合（Ra = 10^3〜10^5）において，詳細なパラメタサーチを行った結果，与えたレイリー数が臨界レイリー数の 100 倍程度で，対称性が崩れ非定常な対流パターンが得られることが分かった．緯度経度格子を用いた有限体積法コード（Ratcliff et al, 1996）では，同じレイリー数で非定常な対流パターンは得られない．これは，上に述べた格子間隔の極端な不均一性により，特に六面体型対流パターンでは，対流の上昇流が数値計算上の「極」域で幅広く，「赤道」域で幅狭くなるという幾何学的に非対称な定常対流のパターンを許してしまうためであると考えられる．つまり，陰陽格子法は現在のところ，差分法系の手法で三次元球殻モデルのマントル対流問題を「正確」に解くための唯一の格子法である．