波動方程式の等価の離散的逆波動方程式への変換－アクロスによる能動監視法に整合する波動場計算

Transformation of wave equation to its discrete equivalent in an inverse form for wave field computation

熊澤 峰夫 [1]; 永井 亨 [2]; 羽佐田 葉子 [3]; 中島 崇裕 [4]
Mineo Kumazawa[1]; Toru Nagai[2]; Yoko Hasada[3]; Takahiro Nakajima[4]

[1] 静大理; [2] 名大・情連基セ; [3] 名大環; [4] 東海大・海洋研
[1] Geosci., Shizuoka Univ.; [2] ITC, Nagoya Univ.; [3] Nagoya Univ.; [4] IORD, Tokai Univ.

背景：アクロスの開発に着手 (1994) してからすでに 13 年経過した。アクロスの「観測技術」の水準向上は、国友らによって、送受信点間の波動のテンソル伝達関数 (周波数範囲限定のグルーン関数に相当) の情報を含む観測データを従来は到達困難な高品質で取得できるようになった。われわれの目標の実効的な地殻深部監視には、要素技術としてのアクロスと送受信点の適切な空間分布とその適切な運用も課題だ。こうして得る生の観測データから、雑音を除去し信頼度評価を付けた伝達関数を導く「一次データ処理法」も逐次その水準をあげつつある。その次には、こうして得る伝達関数を用いて地下の構造と状態を推定する「データ解析法」を要する。これには「構造決定」とその「時間発展の捕捉」の 2 段階がある。このデータ解析法が成立するために必要な基礎は次の二つだ：「物理モデリング」（＝地下の構造と物性に先見情報を与えるモデル）と「順逆問題解法」（＝異方性、分散性をもつ不均質媒質中の波動場計算、及び伝達関数データから物質パラメータの空間分布推定）。以上一連の諸要素を整合的に組上げて、常時能動監視のひとつの体系を構成することは簡単ではないが、結局、避けては通れない道だ。

アクロス研究開発のグループが、この順逆問題に着手 (鶴我、熊澤, 合同学会 1999) してから 8 年が経過し、ようやく満足と思えるアプローチが見えてきた。

波動方程式の逆波動方程式への変換：線形力学系の入力出力関係を記述する波動方程式において、入力と出力の関係を逆にした記述に変換する方法を考える。波動方程式は「一点とその近傍における物理法則」を「波動場 $\mathrm{w}(t,x)$ を入力すると、励起 $\mathrm{e}(t,x)$ を出力する線形力学系」として記述している：

$$\mathrm{e}(t,x') = delta(x',x)\,\mathrm{D}(dt,dx,rho(x),c(x))\,\mathrm{w}(t,x) \qquad (1)$$

ここではこれを短く、

$$\mathrm{e} = \mathrm{D}\,\mathrm{w} \qquad \text{（全ての}t\text{と}x\text{において）} \qquad (1a)$$

と表現する。ただし、dt と dx は時間と空間の偏微分演算子、$rho(x)$ と $c(x)$ は、弾性波の場合、空間の関数で与えられる密度（透磁率/誘電率：電磁波の場合）と弾性定数 (逆誘電率/逆透磁率：電磁波の場合)、$delta(x',x)$ は Kronecker のデルタである。ここで波動場と励起場を離散フーリエ変換 $\mathrm{w}(f,k)$ と $\mathrm{e}(f,k')$ でそれぞれ表現すると、D の中の不連続点における微分は超関数の理論で処理できて、D は代数演算のできる要素からなる行列に変換できる。すなわち、(1a) は $\mathrm{e}(f,k') = \mathrm{sum}_k\,\mathrm{P}(f,k',k)\,\mathrm{w}(f,k)$ と表現できる。この結果を次のように短く書く。

$$\mathrm{e} = \mathrm{P}\,\mathrm{w} \qquad \text{（任意の}f\text{において）} \qquad (1b)$$

これは (1a) と等価なグローバルな波動方程式の離散的表現である。P は w を与えたとき、代数演算のできる要素からなる行列だから、その逆行列 $\mathrm{R}(f,k,k')$ を代数的方法によって計算できる。つまり、波動方程式 (1a) は (1b) を経由して、波動場のグローバルな陽の表現；$\mathrm{w}(f,k) = \mathrm{sum}_{k'}\,\mathrm{R}(f,k,k')\,\mathrm{e}(f,k')$ に変換できる。これを短く、次のように書く。

$$\mathrm{w} = \mathrm{R}\,\mathrm{e} \qquad \text{（任意の}f\text{において）} \qquad (2)$$

これは (1a,b) と異なって、「励起 e を入力すると、波動場 w を出力する線形力学系のグローバルな表現」である。ここで得た (2) は波動方程式 (1a,b) の逆表現なので、逆波動方程式 inverse wave equation と呼ぶことにする。R は周波数・波数応答関数 frequency-wavenumber response と呼ぶべきシステム特性関数である。R をフーリエ変換によって空間領域表現 $\mathrm{R}(w,x,x')$ にすると、これはアクロスの観測量である伝達関数である。フーリエ変換や存否イベント解析法で時間領域に変換した $\mathrm{R}(t,x,x')$ はグリーン関数である。

まとめ：送受信点間の伝達関数を得るアクロス観測の技術的組枠と整合的な波動論とその計算法の理論的組枠ができた。1 次元媒質における数値計算結果は永井他 (2005) の他、本学会に例証してある。この理論それ自体はあまりにも単純なので、先行研究があるかもしれないが実用例はまだ知らない。一般の大規模 3 次元構造への適用には、計算装置の自然的必然的水準向上を待つが、自由度が小さい場合には、直ぐ実用できよう。