

ガウス-クリューゲル図法 Krueger(1912) 第一公式の再評価

Re-evaluation of the first formula given in Krueger(1912) for the Gauss-Krueger projection

政春 尋志 [1]

Hiroshi Masaharu[1]

[1] 地理院・関東地測

[1] GSI

ガウス-クリューゲル図法の計算式として、中央子午線からの経度差のべき級数式（例えば <http://vldb.gsi.go.jp/sokuchi/surveycalc/algorithm/bl2xy/bl2xy.htm>）が今日一般に用いられている。各種文献を参照してもこれ以外の数式が紹介されている例は見あたらない。ところで、多くの文献でこの図法の原典とすべき文献として紹介されている Krueger(1912) には、その第一公式として球に対する横メルカトル図法の式をもとにして子午線長を正しい長さ調整する形の数式が導かれている。この式は通常用いられている式に比べて適用可能な範囲がきわめて広く低中緯度において中央子午線からの経度差 45 度でも精度よく計算でき、かつ極を含む高緯度にまで適用できる。また、数式の形が単純でプログラミングが容易である。このため、ガウス-クリューゲル図法の数式として地図・測量分野だけではなく地球惑星科学の諸分野で活用できるものと考えられる。

この第一公式を以下に示す。数式記述の便宜上、MS Excel のワークシート関数で記載した。すなわち、式の = (等号) 以降をセルにコピーペーストすればすぐに利用できる。ただし、変数は実際の数値または数式を記入したセルのアドレスに置き換えるものとする。変数の意味は、以下の通り。

B : 緯度 (ラジアン) L : 中央子午線からの経度差 (ラジアン)

e : 地球楕円体の離心率 (GRS80 楕円体では 0.08181919104281579)

A : 子午線楕円と等しい周長を持つ円の半径 (GRS80 楕円体では 6367449.14577105 m)

g1, g2, g3, g4 : 展開式の係数

(GRS80 楕円体に対しては、g1=8.3773182473E-04, g2=7.6085277888E-07,

g3=1.1976380192E-09, g4=2.4433762425E-12)

b, eta, xi : 計算の途中で用いる変数、定義は下の式参照。なお、b は正角緯度と呼ばれる。

x : 平面座標 (北に向かって正) y : 平面座標 (y 軸は x 軸に垂直で東の方に正)

$b = \text{ATAN}(\text{TAN}(\text{PI}()/4 + B/2) * ((1 - e * \text{SIN}(B)) / (1 + e * \text{SIN}(B)))^{(e/2)}) * 2 - \text{PI}()/2$

$\text{eta} = \text{ATANH}(\text{SIN}(L) * \text{COS}(b))$

$\text{xi} = \text{ATAN}(\text{TAN}(b) / \text{COS}(L))$

$x = A * (\text{xi} + g1 * \text{SIN}(2 * \text{xi}) * \text{COSH}(2 * \text{eta}) + g2 * \text{SIN}(4 * \text{xi}) * \text{COSH}(4 * \text{eta}) + g3 * \text{SIN}(6 * \text{xi}) * \text{COSH}(6 * \text{eta}) + g4 * \text{SIN}(8 * \text{xi}) * \text{COSH}(8 * \text{eta}))$

$y = A * (\text{eta} + g1 * \text{COS}(2 * \text{xi}) * \text{SINH}(2 * \text{eta}) + g2 * \text{COS}(4 * \text{xi}) * \text{SINH}(4 * \text{eta}) + g3 * \text{COS}(6 * \text{xi}) * \text{SINH}(6 * \text{eta}) + g4 * \text{COS}(8 * \text{xi}) * \text{SINH}(8 * \text{eta}))$

平面座標から緯経度を求める逆変換式はスペースの都合で省略する。この公式の精度をある緯経度に対する平面座標を正変換式で求め、これから逆変換式で緯経度を求めてその較差から見積もった。いくつかの値に対する結果を表に示す。ただし、表の緯度・経度の欄の単位は度、逆変換による緯度差経度差の欄の単位はラジアンである。この表で最も精度が悪い場合の較差は 3.17E-11 ラジアンだから地上の実距離で 0.2 mm である。

緯度	経度	x	y	逆変換緯度差	逆変換経度差
35	2.5	3877450.121018	228245.400450	-3.15E-13	3.19E-16
0	45	0.000000	5627271.912621	0	-7.70E-12
10	50	1703850.492534	6278278.562807	-1.06E-11	2.17E-11
30	60	5455136.341494	6210906.900481	-3.17E-11	1.25E-11
50	70	8217157.794652	4469003.751643	1.91E-12	-5.24E-12
70	80	9598209.995915	2242163.101445	5.20E-14	-2.28E-13

UTM では各ゾーンの適用範囲は中央子午線からの経度差が 3 度まで、かつ緯度は 84 度以下なので、このように広い範囲に適用できる式が必要とされなかった。しかし、回転楕円体に適用した横メルカトル図法をより広い範囲に適用したいニーズはあるだろう。経度差のべき級数式では極に近い高緯度への適用は困難であるが、横メルカトル図法は本質的に極に特異性はない。ある子午線から一定の幅の領域を極域を含めて一つの平面座標にガウス-クリューゲル図法で表すことは、たとえば衛星画像のモザイク等にも活用できるであろう。楕円関数を用いた繰り返し計算で任意の地点のガウス-クリューゲル座標を計算する方法は知られているが、ここに紹介した公式のほうがプログラミングがずっと容易で実用的と考えられる。なお、中央子午線から離れると投影に伴う歪みは大きくなることは考慮しておく必要がある。

なお、この手法による一連の公式の一部はガウスが開発していたが、測地測量に必要な数式のすべてはガウスの

遺稿中に見いだされなかったとクリューゲルは記している。

文献：

Kruger, L. 1912. Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. Veröffentlichung Königlich Preussischen geodatischen Institutes, Neue Folge Nr. 52, 172p.