地球物理データの逆解析：最小自乗法からベイジアンアプローチまで

Geophysical Data Inversion: From the Least Squares Method to a Bayesian Approach

松浦 充宏 [1]
Mitsuhiro Matsu’ura[1]

[1] 東大・理・地球惑星科学
[1] Dept. of Earth & Planetary Science, Univ. of Tokyo

地球物理学では観測データに基づいてモデルの推定が行われる。観測データは，実験データとは異なり，常に不充分で，不正確で，不調和である。このようなデータから如何にして最適なモデルを推定するか，そもそも何を以て最適とするか，それが地球物理学における逆問題の主題である。

今，データ数が n でモデルパラメター数が m の線形観測方程式を考え，その係数行列のランクを p とする。もし n=m=p ならば厳密解が唯一つだけ存在する。それ以外の場合は，特定の解を定めるために何らかの規準が必要となる。例えば，n 大なり m=p の場合，残差の自乗和が最小という規準を設定すれば，最小自乗解を得る。m 大なり n=p の場合は，解ベクトルの長さが最小という規準を設定すれば，最小ノルム解を得る。係数行列の正の固有値と対応する固有ベクトルで構成される Lanczos の逆行列による解は，いかなる場合にも定義され，上記の古典的な解を特殊ケースとして含む。ちなみに，この解は，最小自乗解の中で解ベクトルの長さが最小という規準を満たす解である。

観測データにはノイズが含まれるので，Lanczos の逆行列による解は必ずしも良い解とは言えない。Jackson (1972) と Wiggins (1972) は，モデルパラメターの推定誤差の分散が最大許容分散を超えないという条件を付けて Lanczos の逆行列による解を修正する，シャープカットオフ・アプローチを提案したが，最大許容分散をどのように設定するかは問題として残った。一方，Jackson (1979) は，モデルパラメターに関する先験的情報を観測データと同等に扱い，観測データのノイズに起因する誤差の分散と解像度が不充分であるために生ずる誤差の分散の和（全分散）を最小とする最小分散解を導いた。この解は，確率論的には，観測データからの情報とモデルパラメターの先験的情報をベイズの規則で結合して得られる事後確率密度（尤度）を最大にする解（Jackson & Matsu’ura, 1985）に他ならず，線形観測方程式の古典的な解を全て特殊ケースとして含んでいる。しかし，ここでも，観測データと先験的情報の相対的重みをどのように設定するかは問題として残った。

シャープカットオフ・アプローチにおける最大許容分散の適正値，或いは最小分散解における観測データと先験的情報の相対的重みの適正値をどのように選ぶかという問題は，Akaike (1977) のエントロピー最大化原理の導入によって見事に解決された。即ち，前者の場合は AIC (Akaike, 1974) が最小，後者の場合は ABIC (Akaike, 1980) が最小という規準に従って最適値を選択すれば良い（例えば， Yabuki & Matsu’ura, 1992; Matsu’ura et al., 2007; Noda & Matsu’ura, 2009)。

こうして，観測データから如何にして最適なモデルを推定するかという問題は，一応の解決を見た。しかし，実際のデータに適用してみると，これで全て上手くいくとは限らないことが分かる。その原因は，主として，データ解析に用いる理論モデルの不完全さにある。理論モデルの不完全さは，モデル誤差として観測方程式の誤差に混入する。昔のように観測誤差が充分大きければ，モデル誤差の影響は問題にならない。しかし，観測精度が飛躍的に向上した現在においては，モデル誤差は系統誤差となって，推定結果に深刻な偏りを引き起こす。この問題を解決するには，解析に用いる理論モデルを現実に近づけるか，観測データから理論モデルで説明されるべき部分だけを抽出して観測方程式を構築する必要がある（例えば，Hashimoto et al., 2009）。