

モデルの不完全性を前提とした震源波形インバージョン(1): モデル誤差の重要性とその一般的表現の導出

Waveform inversion for source processes in an incomplete model (1): Importance of modeling error and derivation of its expression

深畑 幸俊 [1]; 八木 勇治 [2]

Yukitoshi Fukahata[1]; Yuji Yagi[2]

[1] 京大・防災研; [2] 筑波大学大学院

[1] DPRI, Kyoto Univ.; [2] Univ. of Tsukuba

観測可能な物理量から未知の物理量を推定するインバージョン解析は、非常に多くの分野で重要な役割を果たしており、中でも固体地球物理学においては観測不可能量が多いこともあって必要不可欠な役割を担っている。インバージョン解析では観測データからの情報を観測方程式を基に抽出する。観測量と推定する物理量とが線形の関係で結ばれる場合、観測方程式は以下のように表される:

$$d=Ha+e$$

ここで、 d は観測データ、 a は推定する物理量を適当に離散化したモデルパラメタ、 H は観測量と推定する物理量とを結び付ける理論的關係式から得られる行列、 e は誤差を表す。ここで、誤差 e は

$$e=d-Ha$$

と書き表せることから分かるように、観測データ d に含まれる誤差と、モデルの不完全性、つまり H 及び a の真値からのずれに由来する誤差 (モデル誤差) の和として定義されている。しかし、これまでほとんど全てのインバージョン解析では、モデル誤差については無視されてきた。モデル誤差を無視するという仮定は、観測誤差が十分に大きい場合には妥当なものである。しかし、現今、観測機器の精度の向上は目覚ましく、少なくない場合について、その仮定は非現実的なものとなりつつある。

モデル誤差を無視したとしても、モデル誤差の統計的性質が観測誤差と似たものであるのなら、実際にインバージョン解析をするに当たって特に不都合なことではない。なぜなら、誤差は、そもそも観測誤差とモデル誤差の和として定義されていて、両者は区別されていないからである。しかし、両者の統計的性質が異なる場合は話が別である。

多くの解析、特に殆ど全ての地震波形の解析において、誤差 e は互いに独立であるとこれまで仮定されてきた。しかし、モデル誤差の重要な特徴は、以下に示されるように、顕著な共分散成分を持つということである。従って、観測精度の向上の成果を十全に生かすためにも、解析手法の改良が必須の課題となっている。そこで、本研究では、線形の場合についてモデル誤差の一般的表現の導出を行った。

線形の観測方程式は、誤差がない場合は、

$$d_0=H_0*a_0$$

と表せる。ここで、 d_0 は真の観測データベクトル、 a_0 は真のモデルパラメタベクトル、 H_0 は真の理論的關係式から得られる係数行列である。実際のところ、我々は、真の理論的關係式も真のモデルパラメタも知り得ないので、そのことを考慮して表現すると観測方程式は

$$d+d'=(H+H')(a+a')$$

となる。 H' と a' はそれぞれ、真の理論的關係式および真のモデルパラメタ値からのずれに起因するモデリング誤差であり、 d' は観測誤差である。また、 d は観測データ、 H は実際の解析に用いる係数行列、 a は解析の結果得られるモデルパラメタである。ここで、誤差の高次項を無視すると誤差ベクトルの表現として

$$e=H'a+Ha'-d'$$

を得る。 e と e の転置の積を取った上で平均操作を施すことにより誤差 e の共分散行列が得られる。我々の問題は、この共分散行列の具体的表現を得ることである。

まず、各誤差源 H' , a' , d' が互いに独立であれば、誤差 e の共分散行列 $E(e)$ は各項の共分散の和を取ることで得られる。即ち、

$$E(e)=E(H')+E(a')+E(d')$$

その時、上式の第2項と第3項については、誤差の伝播則から簡単に求めることができる。第1項の取り扱いには厄介だが、仮に H' の各成分が互いに独立なら、対角行列の形で簡単に得られる。しかし、例えば波形インバージョンの場合には、互いに独立という仮定は成り立たない。その際には、誤差 H' を元々の誤差源と誤差の従属性を生み出す要素(行列)とに分解することにより、 $E(H')$ の表現を得ることができる。この時には非対角成分が存在する。

また、ここでは簡単のため述べなかったが、断層面の位置や向きなどの誤差や離散化誤差も上と同じ枠組みで取り扱えることが示せる。

本研究によりモデル誤差の一般的表現が導出されたことで、モデル誤差をインバージョン解析に取り入れるための基本的な準備が整った。そして、実際の波形インバージョンにおいて、モデル誤差を取り入れることが本質的に重要であることを本大会発表(八木・深畑、2009)で示す予定である。