

分数階微分を用いた岩石レオロジーの構成則 Constitutive law of rock rheology with fractional order derivative

川田 祐介^{1*}, 谷島 尚宏², 長濱 裕幸³
Yusuke Kawada^{1*}, Takahiro Yajima², Hiroyuki Nagahama³

¹ 東京大学 地震研究所 数理系研究部門, ² 東京理科大学 理学部 第二部物理学科, ³ 東北大学 大学院理学研究科 地学専攻
¹ERI, Univ. Tokyo, ²Dept. Physics, Tokyo Univ. Science, ³Dept. Geoenviron. Sci., Tohoku Univ.

岩石の流動則(非弾性挙動の構成則)は, 岩石・鉱物の微視的構造に関する実験・理論的研究に基づいて, これまで長きにわたって探求されており, プレートテクトニクスの枠組みや地球ダイナミクスに関するシミュレーションの発展に重要な役割を果たしてきた。しかしながら, この流動則では万能ではなく, 応力やひずみ速度の急激な変化に対する応答, つまり遷移挙動を表現することはできない。遷移挙動に対しては, アンドレードのクリープ則などの構成則も提案されているが, その現象論的構成式の数理的・熱力学的な背景についてはほとんど探求されてこなかった。そんな中, Yajima and Nagahama (2010, J. Phys. A: Math. Theor.) は, 微分幾何学の範疇で定義されるエネルギー関数から, 分数階微分を用いた一般化粘弾性構成則を導出した。この分数階微分は, その階数が自然数から正の実数に拡張されており, 時間遅れの効果を含んでいる。特に, 歪を分数階微分したときの式は, 粘弾性の記憶効果を表す基本原理であるボルツマン重畳原理の定義式と一致している。さらに, この一般化粘弾性構成則はフック弾性とニュートン粘性の中間の挙動を表現でき, マクスウェル・ケルビン-フォークト・ツェナーモデルなどのあらゆる粘弾性モデルを包含している。この一般化粘弾性構成則の還元化された構成式を用いて, 岩石(岩塩・大理石・レルゾライト)の高温変形実験のデータから, 微分の分数階を決定する解析を行った。これらの岩石は, 緩和弾性率(時間に依存して変化する応力と歪の比)が時間のべき乗則に従い, そのべき乗則の指数から微分の分数階が得られる。この微分階は, 流動則における応力に係る指数の逆数となり, 最終的に一般化粘弾性構成則で, 遷移挙動も定常挙動も表現できる。得られた微分階は, 遷移挙動に対して0.04から0.13(応力指数に直すと7.5から25.0), 定常挙動に対して0.14から0.25(応力指数に直すと4.1から7.1)の範囲となった。流動則の応力指数は拡散や転位クリープなどの変形機構を反映した変数であり, 分数階微分の階数は, 巨視的な時間遅れと微視的な変形機構とをつなぐ重要な変数であると考えられる。

キーワード: 粘弾性, 分数次微積分, レオロジー, 流動則, 遷移挙動, 時間に関するフラクタル特性

Keywords: viscoelasticity, fractional order derivative, rheology, flow law, transient behavior, temporal fractal property