

## 擬似逆行列法を使った地下構造の推定 Estimation of Underground Structure with Pseudo-Inverse Matrix Calculation

今枝 佑輔<sup>1\*</sup>, 盛川 仁<sup>1</sup>

Yusuke Imaeda<sup>1\*</sup>, Hitoshi Morikawa<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 東京工業大学大学院総合理工学研究科

<sup>1</sup>Tokyo Institute of Technology

目に見えない地下構造を探るには、重力や磁場といった遠隔作用で働く力・物理量を使って調べることが必要である。例えば地下の密度構造は、万有引力の法則により地表面の重力場分布に反映されている。地球規模で大局的に決まる重力加速度  $g$  に比べて局所的な密度構造が作り出す重力異常(加速度)が十分小さい場合には、密度分布と異常重力の鉛直成分の間には線形関係が成り立つ。数式を使って表現すれば  $Ax=b$ 、ここでベクトル  $x$  は  $M$  個の点での異常密度を決める密度データ、ベクトル  $b$  は  $N$  個の点での重力異常値を表す観測量、大きさ  $N \times M$  の行列  $A$  は密度ベクトル  $x$  と観測量ベクトル  $b$  を線形に結びつける万有引力から決まる変換行列である。つまり観測データの逆変換を行うことで、地下密度構造を決定できることが期待される。

そこで今回は、異常重力場データから地下の密度構造を推定するためのプログラムを開発し、これについて発表する。

地下密度構造から重力場を計算する  $Ax=b$  の逆変換を行うには、行列  $A$  の逆行列計算が必要になる。通常、逆行列は正方行列に対してしか定義されていない。一方で観測点の数  $N$  と地下構造モデルの代表点の数  $M$  は一般には一致しない。そこで正方行列でない場合にも拡張定義された擬似逆行列の使用を考える。

擬似逆行列を求める手順は以下の通り。

1. 行列  $A$  に左右から直交行列を掛けて二重対角行列  $B=Q_L A Q_R$  を作る
2.  $B^T B$  から正方三重対角行列を作り、この行列の固有値と右固有ベクトルを求める
3.  $M$  個の右固有ベクトルを規格化して並べた直交行列  $Q_V$  と  $Q_R$  から右直交変換行列  $V=Q_R Q_V$  を作る。
4. 行列  $A$  と行列  $V$  の積を直交行列  $U$  と三角行列の積に分解する ( $AV=U$ )  
2. の段階で行列  $V^T B^T B V$  が対角化されているので、三角行列は対角成分以外が0になり対角行列になる
5. 以上の操作により行列  $A$  は直交行列  $U$  と  $V$ 、対角成分に特異値  $\sigma_i$  が並んだ特異値対角行列を使って  
$$A = U \Sigma V^T$$
と分解される。(特異値分解)
6. 対角成分に  $1/\sigma_i$  が並んだ対角行列  $\Sigma^+$  を定義する
7. 擬似逆行列  $A^+ = V \Sigma^+ U^T$  を定義する。

ここで手順 2. において行列の固有ベクトルを求めるには、一般に QR 法と呼ばれる反復手法が使われることが多い。これには通常  $O(M^3)$  程度の計算量が必要である。そこで今回は QR 法による固有ベクトル計算の代わりに I-SVD 法を使うことでこの部分の計算量を  $O(M^2)$  に抑えることにし、プログラム中最も重い部分の計算時間を劇的に軽減することに成功した。但し、その前処理段階である 1. の部分の計算量が  $O(M^3)$  であるのでプログラム全体の計算量としては  $O(M^3)$  のままである。

一方、ほぼ二次元平面上に分布する観測量から地下に三次元分布する密度構造を決定するような問題は、非常に悪条件な問題になることが多い。そのため計算機の丸め誤差の影響が数値計算の限界を決めてしまう。そこで今回は非常に悪条件な問題に対しても計算続行が可能になるように、多倍長計算のライブラリを組み込んだプログラムを開発した。丸め誤差を非常に小さく取れるため、悪条件の問題からそうでない問題まで、同一プログラムを使い統一的に理解することが可能になった。

また様々なテスト計算の結果、観測データに含まれるノイズレベルを正しく把握した上で、ノイズレベル以下に対応する特異値を 0 とした近似擬似逆行列を定義し、これにより逆変換を行うことが有効であることがわかった。一方、精度のみを追求して実装した今回の多倍長計算は通常の倍精度計算に比べて極度に遅い(100倍以上)。今後は無駄な多倍長計算部を極力減らし計算の高速化を図ると共に、重力異常データのみならず磁気異常データを使用することで、問題自体が内包する悪条件性を回避できるかについて検討する予定である。

キーワード: 密度構造, 重力探査, インバージョン, 擬似逆行列

Keywords: density structure, gravity survey, inversion, pseudoinverse