SGD23-P01 会場:コンベンションホール 時間:5 月 25 日 10:45-12:15

非整数次元空間におけるグリーン関数：断層破砕帯における分数冪ラプラシアン
Green’s function in the non-integer dimensional space: the fractional Laplacian for the fault zone

山崎 和仁 [1*], 岩山隆寛 [1]
YAMASAKI, Kazuhito[1*], Takahiro Iwayama[1]

[1] 神戸大学理学研究科地球惑星科学専攻
[1]Department of Earth and Planetary Sciences, Faculty of Science, Kobe University

一般に，破砕帯にける岩体は様々なスケールの不連続性を有するが，その影響は空間次元数の非整数性として記述できる (e.g., フラルタル幾何学)。従って，破砕帯付近における物理現象の定量的記述の為に，非整数次元空間のグリーン関数を導入することは興味深い問題と言える。この問題の考察が本研究の目的である。具体的に扱う作用素はラプラシアンであるが（従って，作用対象の物理量は，点震源周辺の体積歪みや応力の対角成分和など），他の系に対しても拡張は可能であると考える。分数冪ラプラシアンは次式で与えられる：

$(-\triangle)^{\alpha/2} f(r)=-g(r)$ （１）

ここで，αは微分の階数であり，任意の実数値をとる（つまり非整数を含む)。fは作用対象の物理量，gは外力的摂動で，本研究では二次元的摂動に限定して議論を進める。特に，αが整数値 2.0 を取るときが，通常のラプラシアンである。これまで，分数階微分による解析は，地球流体力学においては，α乱流系の解析などで行われてきたが（e.g., Watanaba and Iwayama, 2004; 2007），固体系においては，粘弾性体における構成則の解析（e.g., Yajima and Nagahama, 2010）などを除き，あまり行われてこなかった。ゼロおよび偶数の場合を除いて，任意の微分階数αに対する式（１）のグリーン関数は，次のリーズ型ポテンシャルで与えられる (e.g., Iwayama and Watanabe, 2010)：

$G \propto r^{\alpha-2}$ （２）

ここで，比例係数項などは省いて簡潔に記している。この結果と，任意の整数次元におけるラプラシアンとの関係から，空間の次元Dとαの間に以下の関係式が示唆される：

$D+\alpha=4$ （３）

例えば，αが整数値 1 および 3 を取るとき，$G\propto 1/r$および$G\propto r$，という良く知られた 3 次元および 1 次元空間におけるグリーン関数のr依存性が得られる。ここで注意しなければならないのは，分数階微分において，微分階数αは非整数値を取りうる点である。従って，式（３）から，次元Dも任意の非整数値を取りうる。例えば，αが非整数値 1.5 を取れば，D=2.5 次元空間におけるグリーン関数：$G\propto r^{-0.5}$ が得られる。本来，α自体は，微分の階数として与えられているので，より大きなαは，より非局所的な現象に関係する。式（３）は，この微分階数が，実は空間の次元としても解釈可能であることを意味している。実際，次元が減少するほど，グリーン関数の距離依存性の意味において，現象は非局所化していく。これが，式（３）の現象論的な解釈である。

キーワード: 非整数次元, グリーン関数, 分数冪ラプラシアン, 断層破砕帯
Keywords: non-integer dimension, Green’s function, Fractional Laplacian, Fault zone